L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
Janvier 2017

Feuille de TD 1
Calcul différentiel
Notion de différentielle, définitions, premières propriétés

Exercice 1.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $L \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $a \in F$. On pose $f : E \to F$ définie par $f(x) = L(x) + a$, pour tout $x \in E$. Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$. Montrer que f est différentiable et calculer $d_x f$.
3. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 1$, définie par $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^3$. Montrer que f est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
4. Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$, telle qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E^2$. Montrer que f est différentiable en $x = 0$ et calculer $d_0 f$.

Exercice 2.

1. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables sur $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer leurs différentielles :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \int_0^1 P^3(t) - P^2(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{2n}[X] \\ & P & \mapsto & P' - P^2. \end{array}$$

2. On fixe $n = 1$. Donner pour f et g les matrices canoniquement associées aux applications linéaires $d_P f$ et $d_P g$ pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|.\|_2$ la norme associée. Montrer que $N : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E$, $N(x) = \|x\|_2^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle. En déduire que $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\|.\|_2$ est différentiable en x et calculer sa différentielle.

Exercice 4. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. On considère $\alpha : U \to F$ et $\beta : U \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que α et β sont différentiables sur U et on suppose que β ne s'annule pas sur U. Montrer alors que l'application φ de U dans F définie par $\varphi(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, pour tout $x \in U$ est différentiable sur U et exprimer sa différentielle en fonction de celles de α et β.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit u un endomorphisme de E symétrique, id est, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

1. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle u(x), x \rangle$, pour tout $x \in E$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. A l'aide de l'exercice précédent, déduire que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}, \end{array}$$

   est une application différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.

3. Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a $d_a\varphi = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 6. On considère $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soit φ l'application définie sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ par :

$$\begin{array}{rccccc} \varphi : & \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & & \\ & u & \mapsto & \varphi(u) = \sin(u) : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & & & t & \mapsto & \sin(u(t)). \end{array}$$

Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 7. On considère $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dérivables ayant une dérivée continue. On munit E de la norme suivante :

$$\forall u \in E, \qquad \|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |u'(t)|.$$

On considère également $F = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infini $\|u\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$ pour tout $u \in F$. Montrer que l'application suivante est $\mathscr{C}^1$ sur E :

$$\begin{array}{rcccccc} \phi : & E & \to & F & & & \\ & u & \mapsto & \phi(u) & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & & & & t & \mapsto & u'(t) + tu^2(t). \end{array}$$

Exercice 8. Soit $E = \mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, ayant une dérivée continue et s'annulant en 0. Soit $F = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, $\|y\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)|$, pour tout $y \in F$.

1. Justifier que l'application N définie sur E par $N(y) = \|y'\|_\infty$, pour tout $y \in E$ est une norme sur E.
2. Montrer que l'application suivante est $\mathscr{C}^1$ sur E.

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E & \to & F \\ & y & \mapsto & \phi(y) = (y')^2 + y^2. \end{array}$$

Exercice 9. Soit $n \geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme infini notée N_∞ : pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N_\infty(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que pour tout $i \neq i_0$, on ait $|a_i| < |a_{i_0}|$. On note $B(0,r)$ la boule ouverte pour la norme N_∞ de centre 0 et de rayon $r > 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in B(0,r)$ et tout $i \neq i_0$,
$$|a_i + h_i| < |a_{i_0} + h_{i_0}|.$$
2. En déduire que N_∞ est différentiable en a et exprimer sa différentielle.
3. Dans cette question on suppose qu'il existe i et j dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que $|a_i| = |a_j| = N_\infty(a)$. Montrer alors que N_∞ n'est pas différentiable en a.

Exercice 10. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application de E dans F telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(tx) = t^n f(x)$, avec $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose que f est différentiable sur E.

1. Montrer que pour tout $(t, x, h) \in \mathbb{R} \times E \times E$, $t^{n-1} d_x f(h) = d_{tx} f(h)$.
2. Montrer que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$, on a $d_{tx} f(x) = nt^{n-1} f(x)$ et en déduire que pour tout $x \in E$, $d_x f(x) = nf(x)$. Discuter du cas $n = 0$ et $n = 1$.